# 对 *RL-C* 并联谐振电路阻抗最大值的研究

刘松山

（河南艺术职业学院 教务处，河南 郑州 451464）

**摘要**：对 *RL-C* 并联谐振电路，严格计算了电路阻抗模的最大值 $|Z|_{max}$ 与电路谐振时阻抗 $Z_0$ 的关系.提出并证明了判断 $Z_0$ 是极值的方法.分析了 $Z_0$ 与 $|Z|_{max}$ 之间的相对误差，这个相对误差随着电路品质因数的增大而减小，当电路的 $Q$ 值在几十以上时，$Z_0$ 与 $|Z|_{max}$ 的差别可以忽略，可近似认为该电路谐振时的阻抗 $Z_0=L/RC$ 是最大值.

**关键词**：谐振电路；阻抗；极值

**中图分类号**：O 441.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-0712(2016)07-0014-03

谐振是正弦稳态电路的一种特殊现象，广泛用于无线电和电工技术的诸多领域之中.有关对图 1 的 *RL-C* 并联电路谐振时阻抗 $Z_0=L/RC$ 的讨论，有些文献认为该阻抗为最大[1-3]，文献[4]只是简单说它不是最大，文献[5]对图 1 电路阻抗的最大值做了不太严格的推导.本文严格计算了图 1 电路阻抗模的最大值 $|Z|_{max}$ 与电路谐振时的阻抗 $Z_0$ 之间的关系，通过定义伴生角频率的概念，提出并证明了判断 $Z_0$ 是极值的简便方法，针对实际应用，分析了 $Z_0$ 与 $|Z|_{max}$ 相对误差的关系.该项研究完善了对谐振电路的阻抗或导纳取极值的分析方法和判断方法.

## 1 推导阻抗模的最大值

图 1 电路的输入导纳为

$$Y=\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C=\frac{R}{R^2+\omega^2L^2}+\mathrm{j}\left(\omega C-\frac{\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\right) \quad (1)$$

谐振角频率为

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{CR^2}{L}} \quad (2)$$

即在 $R<\sqrt{L/C}$ 时，电路才能谐振.电路谐振时的阻抗为

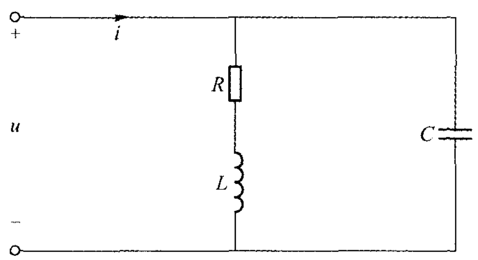


图 1 *RL* 与 *C* 并联电路

$$Z_0=(R^2+\omega_0{}^2L^2)/R=L/RC \quad (3)$$

在此有的文献[1-3]根据电路谐振时式(1)的虚部等于 0，判断 $Y_0$ 是最小值，得出 $Z_0$ 是最大值的结论.此概念不全面，因为导纳的实部一般是角频率的函数，当它的虚部等于 0 时，导纳的模不一定是最小值.正确的计算方法是计算谐振电路阻抗模的极值.由式(1)得阻抗的模为

$$|Z|=\frac{1}{|Y|}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2C^2+\dfrac{1-2\omega^2LC}{R^2+\omega^2L^2}}} \quad (4)$$

因为 $R$、$L$、$C$ 均为定值，$|Y|^2$ 是 $\omega$ 的连续函数，所以可求 $|Y|^2$ 对 $\omega$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}|Y|^2}{\mathrm{d}\omega}=2\omega C^2-\frac{4\omega LCR^2+2\omega L^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2} \quad (5)$$

令式(5)等于 0，得

$$\omega_m=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{2CR^2}{L}}-\frac{CR^2}{L}} \quad (6)$$

因为 $\sqrt{1+2CR^2/L}>CR^2/L$，所以式(6)的应用条件是 $CR^2/L<1+\sqrt{2}$.当 $\omega$ 渐增通过 $\omega_m$ 时，$\mathrm{d}|Y|^2/\mathrm{d}\omega$ 由负值变到正值，则 $|Y(\omega_m)|^2$ 为极小值.那么，$|Y(\omega_m)|$ 也为极小值，而 $|Z(\omega_m)|$ 为极大值.把 $\omega_m$ 代入式(4)化简，得图 1 电路阻抗模的最大值为

$$|Z|_{max}=\frac{L}{\sqrt{C}}\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2LCR^2+L^2}-CR^2-2L}}=Z_0R\sqrt{\frac{C}{2\sqrt{2LCR^2+L^2}-CR^2-2L}} \quad (7)$$

**收稿日期**：2015-11-15；**修回日期**：2016-01-13

**基金项目**：河南省高等教育教学改革研究项目(2014SJGLX474)资助

**作者简介**：刘松山(1958—)男，河南郑州人，河南艺术职业学院副教授，学士，主要从事电路理论教学与应用研究工作.

由式(7)可见,图 1 电路谐振时的阻抗 $Z_0$ 不是最大.设图 1 电路的 $L=10$ mH,$C=100$ μF,当$R=5$ Ω时,由式(3)、式(7)分别可得 $Z_0=20$ Ω,$|Z|_{max}\approx22.4$ Ω;当$R=2$ Ω 时,可得 $Z_0=50$ Ω,$|Z|_{max}\approx50.99$ Ω.可见 $Z_0$ 与$|Z|_{max}$相差不大.当$L=10$ mH,$C=100$ μF,$R=5$ Ω或$R=2$ Ω 时,由式(4)画出图 1 电路阻抗的频率特性如图 2 所示,曲线上标有黑色小圆点的纵、横坐标分别表示谐振时的阻抗值和角频率.

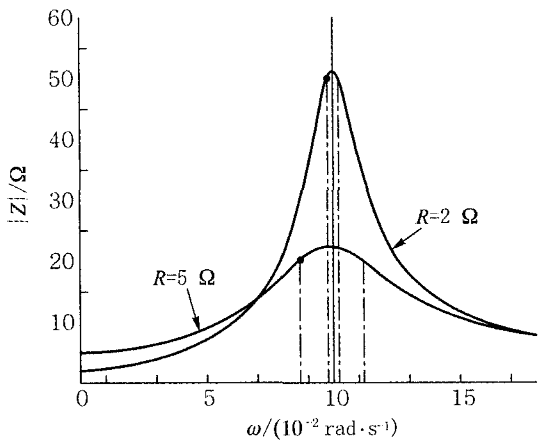


图 2　不同电阻值的阻抗频率特性

## 2　判断 $Z_0$ 是极值的方法

图 1 电路谐振时,由式(3)、式(4)有

$$\sqrt{\omega^2C^2+\frac{1-2\omega^2LC}{R^2+\omega^2L^2}}=\frac{RC}{L}$$

化简得　　$C^2L^4\omega^4-2CL^3\omega^2+L^2C^2R^4=0$

解得　$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{CR^2}{L}}$,　$\omega_2=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1+\frac{CR^2}{L}}$

$\omega_1=\omega_0$ 是谐振角频率,把 $\omega_2$ 称作 $\omega_0$ 的伴生角频率,即当电路阻抗(或导纳)的模等于该电路谐振的阻抗(或导纳)时与 $\omega_0$ 对应的角频率,如图 2 中某个曲线右边虚线的横坐标所示.由于 $\omega_2$ 是谐振电路阻抗不等于极值时产生的,因此可根据 $\omega_2$ 是否存在判断 $Z_0$ 是否为极值.这个简便方法是,当电路输入阻抗(或导纳)的实部等于该电路谐振时的阻抗(或导纳)时,电路谐振时的阻抗(或导纳)是极值.因为,当电路阻抗的模 $\sqrt{\{\mathrm{Re}[Z]\}^2+\{\mathrm{Im}[Z]\}^2}=Z_0$ 时,若 $\mathrm{Re}[Z]=Z_0$,则 $\mathrm{Im}[Z]=0$,由此求出的角频率只有谐振角频率,而伴生角频率不存在,因此,电路谐振时的阻抗是极值.此方法也适用于其他谐振电路.如 $RLC$ 串联谐振电路,因 $\mathrm{Re}[R+\mathrm{j}(\omega L-1/\omega C)]=Z_0=R$,故电路谐振时的阻抗 $Z_0=R$ 是极值.又如图 1 电路,因式(1)的 $R/(R^2+\omega^2L^2)\neq RC/L$,则该电路谐振时的阻抗 $RC/L$ 不是极值.

## 3　$Z_0$ 与$|Z|_{max}$的相对误差

在实际应用中,若以 $Z_0$ 为最大值,由此引起 $Z_0$ 与$|Z|_{max}$的相对误差,可把式(3)、(7)代入下式计算相对误差

$$\delta=\frac{|Z|_{max}-Z_0}{|Z|_{max}}\times100\% \tag{8}$$

得

$$\delta=\left(1-\sqrt{\frac{2L}{CR^2}\sqrt{1+\frac{2CR^2}{L}}-1-\frac{2L}{CR^2}}\right)\times100\% \tag{9}$$

图 1 电路的品质因数为[6] $Q=\frac{\omega_0L}{R}=\sqrt{\frac{L}{CR^2}-1}$ 代入式(9)得

$$\delta=(1-\sqrt{2\sqrt{(1+Q^2)(3+Q^2)}-3-2Q^2})\times100\% \tag{10}$$

因为与 $Z_0$ 相关的式(2)应用条件是 $L/CR^2>1$,与$|Z|_{max}$相关的式(6)应用条件是 $L/CR^2>1/(1+\sqrt{2})$,它们使式(8)和式(9)的应用条件为 $L/CR^2>1$,所以式(10)的应用条件是 $Q>0$.由式(10)画出 $\delta$ 与 $Q$ 的关系曲线如图 3 所示,$\delta$ 与 $Q$ 之间的部分数值关系如表 1 所示.可见,当图 1 电路的 $Q$ 值在 10 以内时,$Z_0$ 与$|Z|_{max}$的相对误差较大.在电子技术领域,图 1 电路的 $Q$ 值一般在几十到几百范围[2]应用,在此情况下,$Z_0$ 与$|Z|_{max}$的相对误差很小,可近似认为该电路谐振时的阻抗 $Z_0=L/RC$ 是最大值.

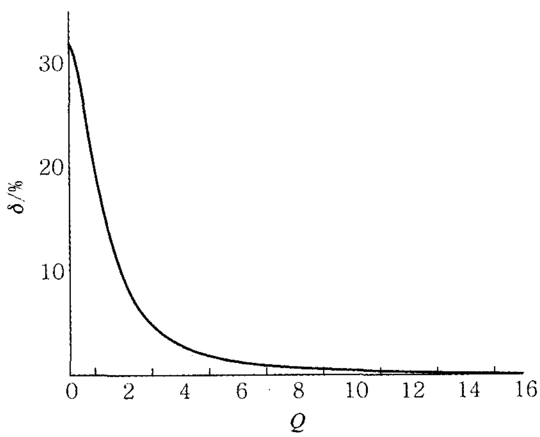


图 3　$\delta$ 与 $Q$ 的关系曲线

表1 $\delta$ 与 $Q$ 的数值关系

| Q | δ/% |
|---|---|
| 1 | 18.95 |
| 3 | 4.66 |
| 6 | 1.32 |
| 10 | 0.49 |
| 20 | 0.12 |
| 30 | 0.06 |

## 4 结论

电路谐振时的阻抗(或导纳)是极值的简便判断方法是,当电路输入阻抗(或导纳)的实部等于该电路谐振时的阻抗(或导纳)时,电路谐振时的阻抗(或导纳)是极值.至于该极值是最大值还是最小值,需要通过计算谐振电路阻抗模的极值进行判断,或者,画出阻抗的频率特性曲线进行判断. 图1电路谐振时的阻抗 $Z_0=L/RC$ 不是最大值,而该电路阻抗的最大值由式(7)确定.当图1电路的 $Q$ 值在几十以上时,$Z_0$ 与 $|Z|_{max}$ 的差别可以忽略,应用时可近似认为电路谐振时的阻抗 $Z_0=L/RC$ 是最大值.由此可见,科学既是严谨的也是近似的,在认识客观规律建立概念的过程中必须严谨,在实际计算过程中需要合理近似,才能使分析的问题得到简化.

## 参考文献:


[1] 石生.电路基础分析[M].3版.北京:高等教育出版社,2008:153-155.

[2] 康华光.电子技术基础[M].5版.北京:高等教育出版社,2006:442-444.

[3] 王桂梦,王幼林.电工电子技术[M]. 北京:机械工业出版社,2013:72.

[4] 邱关源.电路[M].4版.北京:高等教育出版社,1999:210-218.

[5] 汪小娜,单潮龙,王向军,等.关于 *RL* 与 *C* 并联电路阻抗的最大值[J].电气电子教学学报,2010,32(5):29-31.

[6] 刘松山.对谐振电路品质因数定义的再认识[J].西南师范大学学报(自然科学版),2014,39(9):200-203.

[7] 陈水生,郑富年. *RL-C* 并联谐振态量与 $Q$ 的几个关系式[J].大学物理,1999,18(10):23-25.




# Study of the maximum impedance value in the *RL-C* parallel resonant circuit


LIU Song-shan

(Dean's Office, Henan Arts Vocational College, Zhengzhou, Henan 451464, China)



**Abstract**: For a *RL-C* parallel resonant circuit, the relation between the maximum impedance value $|Z|_{max}$ and the impedance of resonant $Z_0$ is presented strictly. The discrimination method of $Z_0$ to be an extreme value is proposed and proved. The relative error of $Z_0$ to $|Z|_{max}$ is analyzed, the relative error decreases as the circuit quality factor increases. If the $Q$ is large enough, the difference of $Z_0$ and $|Z|_{max}$ should be negligible, in this case the circuit resonant impedance $Z_0=L/RC$ arrives at the maximum value.



**Key words**: resonant circuit; impedance; extreme value